1. Stunde

Monday, March 01, 2010
16:59

1. Stunde, 2010 – 03 – 02   Teil 1

1. REKURSIONSTHEORIE

1.1 Registermaschine (mit R Registern)

("Hardware": R Register $\mathbb{R}_0, \dots \mathbb{R}_{R-1}$ ($\hat{=}$ Variablen), die jeweils eine natürliche Zahl speichern.
Separat gespeichert: (·) Programm und (·) aktuelle Programmzeile)

Exakter: Maschine (="Programm") ist Folge von Befehlen $(b_0, b_1, \dots, b_N)$

Jeder Befehl b_i ist einer der folgenden Tupel:

- (·) 0 stop
- (·) $(r, +1)$ $(r < R)$ $\mathbb{R}_r + 1$
- (·) $(r, \dot{-} 1)$ $(r < R)$ $\mathbb{R}_r \dot{-} 1$
- (·) (r, l, m) $(r < R, l, m < N)$ IF $\mathbb{R}_r = 0$ THEN GOTO b_l ELSE GOTO b_m

OBdA: $b_N = 0 =$ "stop"

Konfiguration $\hat{=}$ aktuelle Programmzeile + Speicherinhalt
exakter: Tupel $y = (l, r_0, \dots, r_{R-1})$ $l < N$, $r_0 \dots r_{R-1} \in \mathbb{N}$

Anfangskonfiguration zu input $x_1, x_2 \dots x_n$ $(n < R)$

$$y_0^{x_1 \dots x_n} = (\underset{\text{Pr-Z.}}{0}, \underset{\mathbb{R}_0}{0}, \underset{\mathbb{R}_1}{x_1}, \dots, x_n, 0, \dots \underset{\mathbb{R}_{R-1}}{0})$$

Berechnungsschritt: Gegeben Maschine $\mathcal{M}$ und

Konfiguration $y = (\ell, r_0, \dots, r_{R-1})$.

Dann ist Nachfolgerkonfiguration

$\mathcal{M}(y) = (\ell', r_0', \dots, r_{R-1}')$ def durch:

(·) wenn $b_\ell = \text{stop}$, dann $\mathcal{M}(y) = y$

(·) wenn $b_\ell = R_s := R_s + 1$, dann $\ell' = \ell + 1$, $r_s' = r_s + 1$, $r_t' = r_t$ für $t \neq s$;

(·) wenn $b_\ell = R_s := R_s \dot{-} 1$, dann $\ell' = \ell + 1$, $r_s' = \max(0, r_s - 1)$, $r_t' = r_t$ für $t \neq s$

(·) wenn $b_\ell =$ IF $R_s = 0$ THEN GOTO b_a ELSE GOTO b_b

dann $r_t' = r_t$ für alle t, und

$(r_s = 0 \to \ell' = a \;;\; r_s \neq 0 \to \ell' = b)$

Die durch $\mathcal{M}$ berechnete partielle Funktion:

$f^n_{\mathcal{M}} : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$: $(n < R)$

Gegeben $x_1 \dots x_n \in \mathbb{N}^n$.

<u>Wenn</u> für ein k gilt: $\mathcal{M}^k(y_0^{x_1 \dots x_n}) = (\ell, r_0, \dots)$

und $b_\ell = \text{stop}$, <u>dann</u> $f^n_{\mathcal{M}}(x_1 \dots x_n) = r_0$

<u>Sonst</u> $f^n_{\mathcal{M}}(x_1 \dots x_n)$ undef.

Def: $f : A \to B$ <u>part</u> Fkt. $:\Leftrightarrow \exists A' \subseteq A \;\; f : A' \to B$

Wenn $f : A \to B$ "klassisch" (d.h. $A = A'$): f "total"

Def: $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ maschinen-berechenbar, wenn

$\exists R \geq n$ und R-Registermaschine $\mathcal{M}$

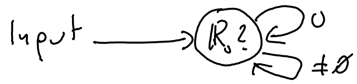
sd $f = f^n_{\mathcal{M}}$

Bsp 1: $\mathcal{M} = (b_0)$

$b_0 =$ IF $R_0 = 0$ THEN GOTO 0 ELSE GOTO 0

D.h.: formal: $\mathcal{M} = (0)$ (Folge d. Länge 1, einz. El 0)

$\Rightarrow$ $f_{\mathcal{M}}^n$ nirgends def



Bsp 2: $\mathcal{M} = (b_0, b_1, b_2, b_3, b_4)$

0: $b_0 =$ IF $R_1 = 0$ THEN GOTO 4 ELSE GOTO 1

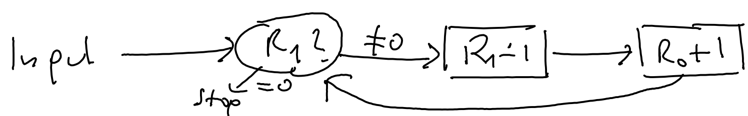
1: $b_1 = R_1 := R_1 \dot{-} 1$

2: $b_2 = R_0 := R_0 + 1$

3: $b_3 =$ GOTO 0 [IF $R_0 = 0$ GOTO 0 ELSE GOTO 0]

4: $b_4 =$ STOP

D.h. formal $\mathcal{M} = ((1,4,1),(1,-1),(0,+1),(0,0,0),0$



$\Rightarrow$ $f_{\mathcal{M}}^1 = \mathrm{Id}$ $\quad f_{\mathcal{M}}^1(n) = n$

Bzw $f_{\mathcal{M}}^n = Pr_1^n$ $\quad f_{\mathcal{M}}^2(a,b) = a$